EXERCICE N°1 : 25' 6 points

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\ln x-1}{2\ln x+2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$;

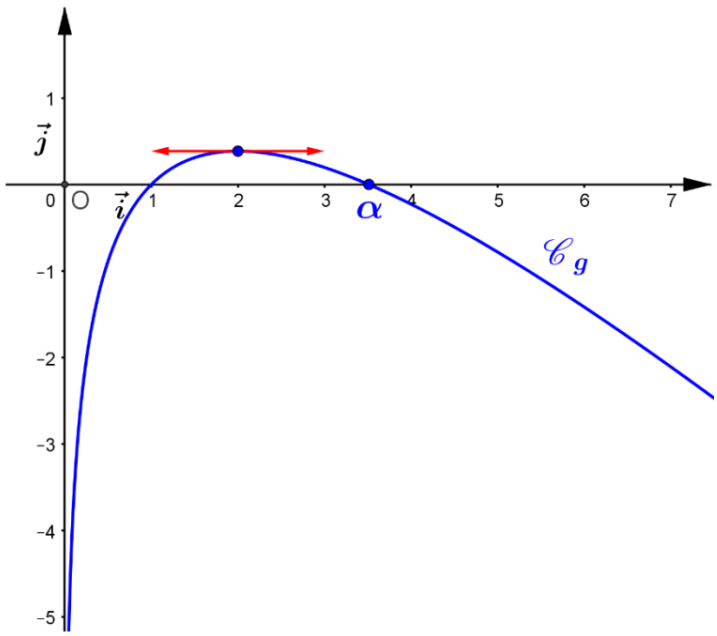
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{3+2(\ln x)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2-x\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\ln x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{x}$.

EXERCICE N°2 : 30' 6 points

I– La figure ci-dessous, montre la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé, de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x+2\ln(x)$.

◗ La courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses 1 et α.



1°) a) Montrer que $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

b) Déterminer le maximum de $g(x)$.

II– Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur IR_+^* , et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$.

3°) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x)>\alpha$.

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\ln x$.

a) Étudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5<x_0<3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2°) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f\left(\sqrt{x_0}\right)=\dfrac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (on prendra $x_0\approx 3,6$).